Μάθημα: ① 6/4/17

- $e^{\pi i}+1=0$ → εξίσωση του Θεού (έχει όλα τα στοιχεία της φύσης).
- $e^{z} e^{-z}=e^{0}=1$
- ΘΔΟ ισχύει: $e^{z}=\lim_{\nu}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)^{\nu}$

Απόδειξη:

Θέτω $1+\frac{z}{\nu}=a_\nu$

$z=x+iy$

Για να δείξω ότι $e^{z}=\lim a_\nu$, όπου $e^{x}e^{iy}$, αρκεί νδο:

$e^{x} \leftarrow |a_\nu|$

$y \leftarrow \operatorname{Arg}|a_\nu|$

Σχόλιο:

$$\left|1+\frac{z}{\nu}\right|^{\nu}=\left|\left(1+\frac{x+iy}{\nu}\right)\right|^{\nu}=\left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{2}+\frac{y^{2}}{\nu^{2}}}\right)^{\nu} \geq$$

$$\geq\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu} \rightarrow e^{x}.$$

$z_\nu=\rho_\nu e^{i\theta_\nu}$

$z=\rho e^{i\theta}$

$z_\nu \to z \Leftrightarrow \rho_\nu \to \rho$

$\theta_\nu \to \theta$.

Εφαρμόζω την ανισότητα $\log|1+x| \leq x$.

$\liminf |a_\nu| \geq e^{x}$

$$\log\left(\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{2}+\frac{y^{2}}{\nu^{2}}\right)^{\nu/2}=\frac{\nu}{2}\log\left(1+\frac{x^{2}+y^{2}}{\nu^{2}}+\frac{2x}{\nu}\right) \leq \frac{\nu}{2}\left(\frac{x^{2}+y^{2}}{\nu^{2}}+\frac{2x}{\nu}\right)=$$

$$=\frac{x^{2}+y^{2}}{2\nu}+x.$$

Ανισότητα Bernoulli

$(1+x)^{\nu} \geq \nu x$

$\limsup \log|a_\nu| \leq x.$

$\log(\limsup |a_\nu|) \leq x \Rightarrow \limsup |a_\nu| \leq e^{x}.$

Άρα $\lim |a_\nu|=e^{x}$

Επίσης: $\operatorname{Arg} a_\nu=\operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)^{\nu}=\nu \operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)$

Όμως $z=x+iy$

Έτσι: $\left(1+\frac{x+iy}{\nu}\right)=1+\frac{x}{\nu}+i\frac{y}{\nu}$

$$\operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)=\text{Τοξεφ}\frac{\frac{y}{\nu}}{1+\frac{x}{\nu}}$$

Άρα: $\operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)^{\nu}=\nu\,\text{Τοξεφ}\frac{\frac{y}{\nu}}{1+\frac{x}{\nu}}$ → δια φράσα ν.

Θεωρώ τη συνάρτηση: $\varphi(t) = t\,\text{Τοξεφ}\dfrac{\frac{y}{t}}{1+\frac{x}{t}}$.

Αν $\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} l$, τότε και η $\varphi(w) \to l$.

Το ίδιο και για την $\varphi(2w)$....

Οα

Θα δουλέψω λοιπόν με την $\varphi(t)$:

$\varphi(t) = \dfrac{\text{Τοξεφ}\frac{y}{t+x}}{\frac{1}{t}}$ και είναι: $\dfrac{\dfrac{\left(\frac{y}{t+x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{t+x}\right)^2}}{-\frac{1}{t^2}} = \dfrac{\dfrac{\frac{-y}{(t+x)^2}}{1+\frac{y^2}{(t+x)^2}}}{-\frac{1}{t^2}} =$

$$= \dfrac{\frac{-y}{(t+x)^2+y^2}}{\frac{t^2 y}{(t+x)^2+y^2}} \to y.$$

- $e^{iy} = \text{συν}y + i\,\text{ημ}y$
- $e^{-iy} = \text{συν}y - i\,\text{ημ}y$

$(+)$: $\boxed{\text{συν}(y) = \dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}}$

$(-)$: $\boxed{\text{ημ}(y) = \dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}}$

Άρα: ορίζουμε $\boxed{\text{συν}(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}$, $\boxed{\text{ημ}(z) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$

- $\text{ημ}(z+w) = \text{ημ}(z)\,\text{συν}(w) + \text{ημ}(w)\,\text{συν}(z) =$

$$= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} =$$

$$= \frac{2e^{i(z+w)} + \cancel{e^{i(z-w)}} - \cancel{e^{-i(z-w)}} - 2e^{-i(z+w)} + \dots}{4i} = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}$$

• Στους πραγματικούς οι συναρτήσεις ημ(x), συν(x) είναι φραγμένες. ③
Δηλαδή ισχύει η γνωστή σχέση $|ημ(x)| \leq 1$.
Στις μιγαδικές συναρτήσεις δεν ισχύει αυτό. Δηλαδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι φραγμένες.

Δείγμα: $|ημ z| = 2π$

$ημ z = 2πi$

$z = x + iy$

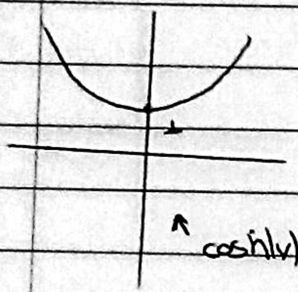
→ η αλγεβρική μορφή

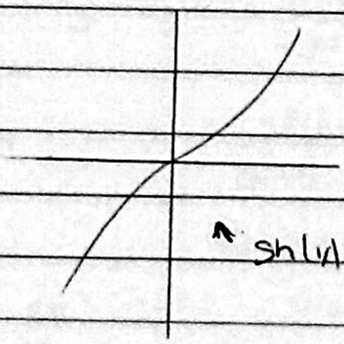
$2πi = ημ(x+iy) = ημ(x) \cdot συν(iy) + συν(x) \cdot ημ(iy) \;(*)\; = ημ(x)\, ch(y) + i\, συν(x)\, sh(y)$

↳ υπερβολικό συνημίτονο.

(*) $συν(iy) = \dfrac{e^{iiy} + e^{-iiy}}{2} = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} = ch(y)$ → υπερβολικό συνημίτονο

$ημ(iy) = \dfrac{e^{iiy} - e^{-iiy}}{2i} = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\,\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i\, sh(y)$ → υπερβολικό ημίτονο





$ημ(x)\, ch(y) = 0 \Rightarrow x = kπ$.

$συν(x) \cdot sh(y) = 2π$

$(-1)^k sh(y) = 2π \Rightarrow sh(y) = (-1)^k 2π \Rightarrow \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} = (-1)^k 2π \Rightarrow$

↳ περνάω με το $(-1)^k$.

$\Rightarrow e^{y} - e^{-y} = (-1)^k 4π \Rightarrow e^{2y} - (-1)^k 4π e^{y} - 1 = 0$.

Θέτω $e^{y} = u$ → από εδώ $u > 0$.

Έχω: $u^2 - (-1)^k 4πu - 1 = 0$

$u = (-1)^k 2π \pm \sqrt{((-1)^k 2π)^2 + 1} = (-1)^k 2π \pm \sqrt{4π^2 + 1}$ ↓ με το +. $=$
- k περιττός, $k = 2λ+1$: $-2π + \sqrt{4π^2+1} > 0$, άρα δεκτή
- k άρτιος, $k = 2λ$: $2π + \sqrt{4π^2+1} > 0$, άρα δεκτή

↳ με το −. $=$
- k περιττός, $k = 2λ+1$: $-2π - \sqrt{4π^2+1} < 0$ απορ.
- k άρτιος, $k = 2λ$: $2π - \sqrt{4π^2+1} < 0$, απορ.

Άρα: $u = -2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}$, $k = 2\lambda+1$.

$u = 2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}$, $k = 2\lambda$.

$e^y = u \Rightarrow y = \log(-2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})$, $k = 2\lambda+1$

$y = \log(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})$, $k = 2\lambda$.

$$z = x+iy = \begin{cases} (2\lambda+1)\pi + i\log(-2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}) \\ 2\lambda\pi + i\log(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

Παρατήρηση: Βλέπουμε λοιπόν ότι:

$ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

- $e^\omega = z$, ω: άγνωστος.

$\omega = u+iv$, $z = x+iy$

$e^{u+iv} = x+iy = z$

$e^u \cdot e^{iv} = z = x+iy$

$|e^u| \cdot |e^{iv}| = |z|$

$e^u = |z| \Rightarrow u = \log|z|$ & $v = \arg(z)$.

$a = |a|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |a|e^{i\theta}$

Άρα, αν ξέρω το $z = x+iy$, έχω: $\omega = \log|z| + i\arg(z)$. $\Rightarrow \log(z) = \log|z| + i\arg(z)$

↓ Τυχαίος λογάριθμος. Δεν μας κάνει γιατί έχει άπειρα ορίσματα.

$\boxed{Log(z) = \log|z| + i\,Arg(z)}$ $\Rightarrow$ Κύριος λογάριθμος. → έχει το κύριο όρισμα.

Ιδιότητες:

- $e^\omega = z \Leftrightarrow \omega = Log(z)$.
- $e^{Log(z)} = z$
- $\log(z) = \log(e^\omega) = \omega$
- $e^\omega \neq 0$, $\forall \omega \in \mathbb{C}$. $Log: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$.

Άρα ο λογάριθμος ορίζεται σε όλα τα σημεία, εκτός από το μηδέν.

Η $Log(z)$ είναι αναλυτική στο ανοικτό $\mathbb{C}\setminus\{z: z+|z|\neq 0\}$

$(e^{\omega})' = e^{\omega}$

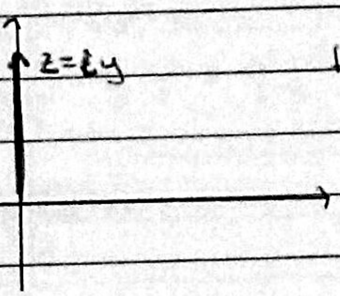
$\frac{d}{dz} e^{Log(z)} = 1$

$\frac{d}{dz}\left(Log(z)\right) e^{Log(z)} = 1$

$\frac{d}{dz}\left(Log(z)\right) = \frac{1}{e^{Log(z)}} = \frac{1}{z}$

Άρα η $Log(z)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $\boxed{\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}}$

$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $Re(z) = 0$.



$f(iy) = u+iv = \frac{iy-1}{iy+1} = \frac{(iy-1)(-iy+1)}{y^2+1} = \frac{-(iy-1)^2}{y^2+1} =$

$= \frac{-y^2+2iy+1}{y^2+1} = \underbrace{\frac{-1+y^2}{y^2+1}}_{u} + i\underbrace{\frac{2y}{y^2+1}}_{v}$

Άρα: $u = \frac{y^2-1}{y^2+1}$, $v = \frac{2y}{y^2+1}$.

$\frac{v}{u} = \frac{2y}{y^2-1} = \lambda \Rightarrow \quad v = \lambda u, \quad u = \frac{v}{\lambda}$

$2y = \lambda(y^2-1) \Rightarrow \lambda y^2 - 2y - 2\lambda = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\lambda}\left(1 \pm \sqrt{1+2\lambda^2}\right)$

Συνεπώς: $\boxed{u = \frac{\frac{2}{\lambda}\left(1 \pm \sqrt{1+2\lambda^2}\right)}{1 + \frac{1}{\lambda^2}\left(1 \pm \sqrt{1+2\lambda^2}\right)^2}}$

$v = \frac{\frac{2}{\lambda}\left(1 \pm \sqrt{1+2\lambda^2}\right)}{1 + \frac{1}{\lambda^2}\left(1 \pm \sqrt{1+2\lambda^2}\right)^2} = \frac{\frac{2u}{v}\left(1 \pm \sqrt{1+2\frac{u^2}{v^2}}\right)}{1 + \frac{u^2}{v^2}\left(\quad \right)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v = \frac{2uv\left(1 \pm \sqrt{1+2\frac{v^2}{u^2}}\right)}{v^2 + u^2\left(1 \pm \sqrt{1+2\frac{v^2}{u^2}}\right)^2}}$

$$v^2 + u^2\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2v^2}{u^2}}\right)^2 = 2u\left(1 \pm \sqrt{\ }\right)$$

$$v^2 + u^2\left(1 \pm 2\sqrt{\ } + \left(1 + \frac{2v^2}{u^2}\right)\right) = \; \ldots = 2u\left(1 + \sqrt{\ }\right).$$

$F(u,v)=0$

↳ οι λύσεις του είναι το F (οπου φανταστικό άξονα).